# 第 19 講　三角関数(2)

**【基礎確認事項】**

## ［１］　加法定理

□三角関数について，次の**加法定理**が成り立つ．

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　⑥ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

□④が成り立つことにより，①が以下のようにして示される．

※③，④の証明は講義問題①で扱う．

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

①で $\beta$ を $-\beta$ に置き換えることにより，②が以下のようにして示される．

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

⑤については①，③より以下のように導かれる．

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

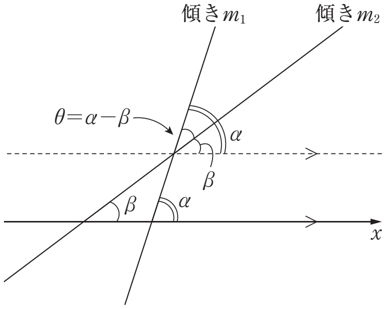
この式で $\beta$ を $-\beta$ に置き換えることにより，⑥が導かれる．

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

□ $x$ 軸の正の方向となす角が $\alpha$，$\beta$ である 2 直線の傾きをそれぞれ $m_1$，$m_2$ とすると，⑥の公式を用いることにより，2 直線のなす角 $\theta$ について

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

である．




□なす角は鋭角で答えるのが基本であるが，鋭角か鈍角かがグラフから判断できない場合は，$\tan\theta$ の値が

正 $\Longrightarrow$ 鋭角　負 $\Longrightarrow$ 鈍角　であることを利用するとよい．

⇒　C&U ① ②



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

## ［2］　2倍角の公式と半角の公式

□加法定理において，$\beta=\alpha$ とすると，次の**2倍角の公式**（倍角の公式）が得られる．

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

※②の第1式において
$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を用いると第2式が
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を用いると第3式が得られる．

□これらにより，角度が $2\alpha$ の三角関数を，その半分の角 $\alpha$ の三角関数で表すことができる．
その結果，1次の三角関数であったものが2次（積）の三角関数で表されることとなる．

①より $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ が得られる．

②の第2式より $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ……④

第3式より $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ……⑤

④，⑤より　$\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ ……⑥が得られる．

これらにより，角度が $\alpha$ の三角関数を，その倍の角 $2\alpha$ の三角関数で表すことができる．
その結果，2次（積）の三角関数であったものが1次の三角関数で表されることとなる．

□ちなみに④，⑤，⑥で $2\alpha=\theta$ とおくと，次の**半角の公式**が得られる．

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\qquad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\qquad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

⇒ C&U ３ ４



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　$\alpha$，$\beta$ が鋭角で，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$ であるとき，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ．

2　2直線 $y=-2x+1$，$y=3x-1$ のなす鋭角 $\theta$ を求めよ．

3　加法定理および2倍角の公式を用いて，次の公式（3倍角の公式）を証明せよ．

(1)　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　(2)　$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

4　$\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ のとき，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

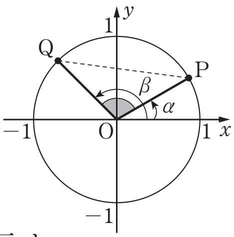
< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 19 講　三角関数(2)

**1** 右図について，次の問いに答えよ．




(1) $PQ^2$ を次の 2 通りの方法で角 $\alpha$，$\beta$ を用いて表せ．

(i) 点 P と点 Q の座標をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ で表し，2 点間の距離の公式（三平方の定理）を用いる．

(ii) $\triangle POQ$ において余弦定理を用いる．

(2) (1)より $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

(3) (2)で $\beta$ を $-\beta$ に置き換えることにより，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2** (1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ.

(2) 等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2} + 4 > 0$ を解け．

［2］ $\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

（1） $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$　（2） $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　（3） $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　三角関数(2)

$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を以下のようにして求める．$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $5\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であることより

$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ……① が成り立つ．ここで

$\sin 2\theta=\boxed{\text{イ}}\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=\boxed{\text{ウ}}\cos^3\theta-\boxed{\text{エ}}\cos\theta$

であることより，①は $\boxed{\text{イ}}\sin\theta\cos\theta=\boxed{\text{ウ}}\cos^3\theta-\boxed{\text{エ}}\cos\theta$ ……② と変形できる．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ より②の両辺を $\cos\theta$ で割って整理すると

$\boxed{\text{オ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{カ}}\sin\theta-1=0$ となる．これを $\sin\theta$ について解くと，

$\sin\theta=\frac{-\boxed{\text{キ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．ここで $0<\sin\frac{\pi}{10}<1$ であることより，

$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　三角関数(2)

## 【CHECK & UP】

**1**　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ より　$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ より　$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$

このとき

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{13}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{12-10\sqrt{2}}{39}}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{12}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{24\sqrt{2}+5}{39}}$$

「加法定理の公式」の証明には非常に時間がかかるため，原理を理解した後は使うことで「暗記」しなければいけない公式である．
この問題のように実際に三角関数の値を入れて計算することは今後多くはないが，三角関数の相互関係も含めて練習しておこう．

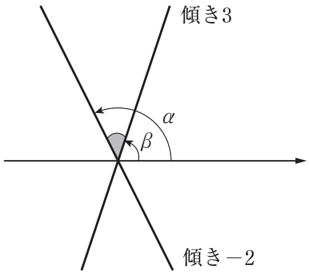
**2**　2直線 $y=-2x+1$，$y=3x-1$ が $x$ 軸の正方向となす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると，$\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=3$ である．
このとき

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-2-3}{1+(-2)\cdot3}=1$$

よって $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに求める鋭角は　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$




三角比においても直線の傾きと tan の値については扱った．ここではそれぞれの直線が $x$ 軸となす角が不明な状態で，2直線のなす角を tan の加法定理を用いて導く問題である．
　なす「鋭角」となっている．加法定理によって導いた「角度の差」が鋭角かどうかは，図を描いた時点ではわからない場合もある．その場合は $\theta$ は鋭角として最後に「のみ」登場することとなる．

**3**　(1)　$\sin3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$

$$=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

(2)　$\cos3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$

$$=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

3倍角の公式はいずれ暗記する必要があるが，この公式を導くプロセスの中に，加法定理，2倍角，相互関係といった重要公式が入っていることを忘れてはならない．また cos の2倍角は3択であるが，今回はどれを選択すべきか，といった判断の練習にもなる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**4** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ のとき　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{7}{16}}=-\dfrac{3}{4}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{4}}{2}=\frac{7}{8}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

> 与えられた角度に対し，値を求めたい関数の角度はその「半分」である．よって「半角の公式」により「角度を倍」にして与えられた三角関数の値を利用できるようにする必要がある．$\dfrac{\alpha}{2}$ だから半角の公式，ではない．
> 半角の公式は cos の2倍角の公式から変形して作成するため，まずは確実に
> $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$
> $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
> を覚えること．この2倍角の公式は，$2\theta$ を $\theta$ で表し直す，つまり「角度を半分にする」公式である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　三角関数(2)

**1**　右図について，次の問いに答えよ．

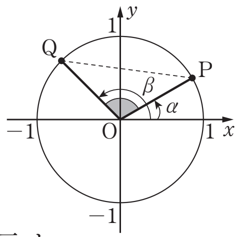
(1)　$PQ^2$ を次の2通りの方法で角 $\alpha$，$\beta$ を用いて表せ．

(i)　点Pと点Qの座標をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ で表し，2点間の距離の公式（三平方の定理）を用いる．

(ii)　$\triangle POQ$ において余弦定理を用いる．

(2)　(1)より $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

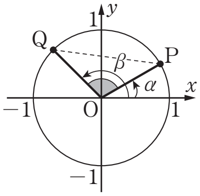
(3)　(2)で $\beta$ を $-\beta$ に置き換えることにより，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．




(1)　(i)　$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$ より

$$PQ^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$
$$=\mathbf{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$

(ii)　$\triangle POQ$ で余弦定理より




$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cdot\cos\angle POQ$$
$$=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\beta-\alpha)$$
$$=\mathbf{2-2\cos(\beta-\alpha)}$$

(2)　(1)より　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\beta-\alpha)$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

一般に $\cos(-\theta)=\cos\theta$ であるから　$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$

したがって，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

一般に $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

**2**　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $\sin2\theta=\sin3\theta$ が成り立つことを示せ．

(2)　等式 $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$5\theta=\pi$　　つまり　$2\theta=\pi-3\theta$

よって　$\sin2\theta=\sin(\pi-3\theta)=\sin3\theta$　より　$\sin2\theta=\sin3\theta$

(2)　$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$$=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

よって，$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

ここで(1)より　$\sin2\theta=\sin3\theta$ であるから

$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\theta=\frac{\pi}{5}$ のとき　$\sin\theta=\sin\frac{\pi}{5}\neq0$ より，両辺を $\sin\theta$ で割って

$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$　　$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$　　よって　$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\theta=\frac{\pi}{5}$ のとき　$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{5}>0$ より　$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$

3 [1]　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4>0$ を解け．

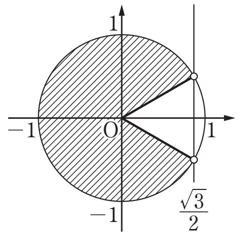
$\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4>0$

$2\cos^2\frac{\theta}{2}-1-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4>0$

$2\cos^2\frac{\theta}{2}-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+3>0$

$\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)>0$

$\cos\frac{\theta}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}<\cos\frac{\theta}{2}$




ここで $0\leqq\theta<2\pi$ より　$0\leqq\frac{\theta}{2}<\pi$

よって　$\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<\pi$　　したがって　$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}<\theta<2\pi}$

3 [2]　$\tan\frac{\theta}{2}=t$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$

(1)　$\tan\frac{\theta}{2}=t$ より　$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$

(2)　$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=1+\tan^2\frac{\theta}{2}$ より　$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+t^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\dfrac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

**【別解】**　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　より

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$　　つまり　$t^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$t^2+t^2\cos\theta=1-\cos\theta$

$(1+t^2)\cos\theta=1-t^2$　　よって　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1)(2)より　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　三角関数(2)

$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を以下のようにして求める．$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $5\theta=\frac{\pi}{\boxed{ア}}$ であることより

$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ……① が成り立つ．ここで

$\sin 2\theta=\boxed{イ}\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=\boxed{ウ}\cos^3\theta-\boxed{エ}\cos\theta$

であることより，①は $\boxed{イ}\sin\theta\cos\theta=\boxed{ウ}\cos^3\theta-\boxed{エ}\cos\theta$ ……② と変形できる．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ より②の両辺を $\cos\theta$ で割って整理すると

$\boxed{オ}\sin^2\theta+\boxed{カ}\sin\theta-1=0$ となる．これを $\sin\theta$ について解くと，

$\sin\theta=\frac{-\boxed{キ}\pm\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．ここで $0<\sin\frac{\pi}{10}<1$ であることより，

$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき　$5\theta=\frac{\pi}{\mathbf{2}}$ であることより　$\sin 2\theta=\sin(5\theta-3\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\cos 3\theta$

よって　$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ……① が成り立つ．

ここで，$\sin 2\theta=\mathbf{2}\sin\theta\cos\theta$

また，$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=\mathbf{4}\cos^3\theta-\mathbf{3}\cos\theta$

よって①は　$\mathbf{2}\sin\theta\cos\theta=\mathbf{4}\cos^3\theta-\mathbf{3}\cos\theta$ と変形できる．

両辺を $\cos\theta(\neq 0)$ で割って

$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$　　$2\sin\theta=4(1-\sin^2\theta)-3$　　よって　$\mathbf{4}\sin^2\theta+\mathbf{2}\sin\theta-1=0$

これを $\sin\theta$ について解いて　$\sin\theta=\frac{\mathbf{-1\pm\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$

$0<\sin\frac{\pi}{10}<1$　より　$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\mathbf{-1+\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。